

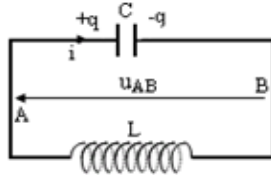
Niveaux: SM PC SVT	Matière: Physique
PROF: Zakaryae Chriki	Résumé N:8
Le circuit RLC série	



Dipôle LC : association série d'un condensateur chargé de capacité C et de charge initiale q_0 et d'une bobine d'inductance L et de résistance interne r négligeable.

I. Etude du circuit LC

1. Montage : Décharge d'un condensateur dans une bobine



2. Equation différentielle :

En appliquant la loi d'additivité des tensions $U_C + U_L = 0$ et les transitions :

$$q = C \cdot U_C \quad \text{et} \quad i = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{dU_C}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} = C \cdot \frac{d^2U_C}{dt^2} \quad U_L = r \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot \frac{di}{dt} \quad ; \quad r=0$$

On aboutit à l'équation différentielle vérifiée par une variable donnée :

$$U_C + U_L = U_C + r \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} = U_C + L \cdot \frac{di}{dt} = 0$$

Variable U_C :

$$U_C + L \cdot \frac{di}{dt} = U_C + L \cdot C \cdot \frac{d^2U_C}{dt^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} \cdot U_C = 0$$

Variable q :

$$U_C + L \cdot \frac{di}{dt} = U_C + L \cdot \frac{dq}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{q}{C} + L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC} \cdot q = 0 \quad \text{Avec} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \omega_0 : \text{Pulsation propre (en rad/s)}$$

3. Equation horaire ou la solution :

Soit $U_C(t)$ comme variable, la solution est :

$$U_C(t) = U_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$$

avec U_m : L'amplitude (la valeur maximale de la tension $U_C(t)$)
 $\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi$: La phase à l'instant t
 φ : la phase à l'origine des temps $t=0$
 T_0 : la période propre (s)
 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$: Pulsation propre (en rad/s)

3.1. Déterminer T_0 la période propre :

Remplacer la solution et sa dérivée seconde dans l'équation différentielle :

$$U_C(t) = U_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$$

$$\frac{dU_C(t)}{dt} = -U_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$$

$$\frac{d^2U_C}{dt^2} = -U_m \cdot \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$$

$$\frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} \cdot U_C = 0$$

$$-U_m \cdot \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right) + \frac{1}{LC} \cdot U_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right) = 0 \quad \text{donc} \quad U_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right) \cdot \left(-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 + \frac{1}{LC}\right) = 0$$

L'équation est juste si $-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 + \frac{1}{LC} = 0$ et $\frac{1}{LC} = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2$, on en déduit alors $T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}$

Remarque :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C_0}} = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad \text{d'où} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

3.2. Déterminer U_m et φ par les conditions initiales :

- A $t=0$: - Le condensateur est chargé et $U_C(0) = U_0 = E$
- $i(0)=0$: le circuit est ouvert

On remplace les conditions initiales dans les expressions de $U_C(t)$ et $i(t)$ à l'instant $t=0$.

$$U_C(t) = U_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right) \quad \text{et} \quad i(t) = C \cdot \frac{dU_C(t)}{dt} = -C \cdot U_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$$

A l'instant t=0

$$U_c(0) = U_m \cdot \cos(\varphi) \quad \text{et} \quad i(0) = -C \cdot U_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin(\varphi)$$

(1)
 $U_c(0) = U_m \cdot \cos(\varphi) = E$
 $\cos(\varphi) = \frac{E}{U_m}$

(2)
 et $i(0) = -C \cdot U_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin(\varphi) = 0$
 alors $\sin(\varphi) = 0$
 d'où $\varphi=0$ ou $\varphi=\pi$

(3)
 Or $E > 0$ et $U_m > 0$ alors $\cos(\varphi) = \frac{E}{U_m} > 0$
 d'où $\varphi=0$

De la relation (1) on en déduit : $U_m = \frac{E}{\cos(\varphi)} = \frac{E}{\cos(0)} = E$

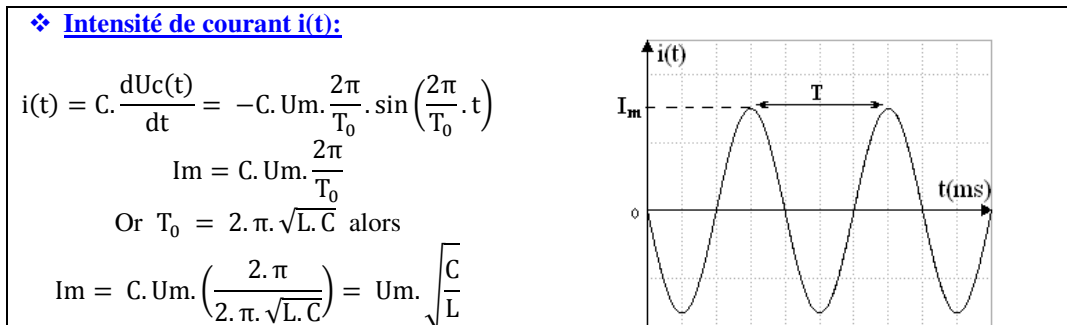
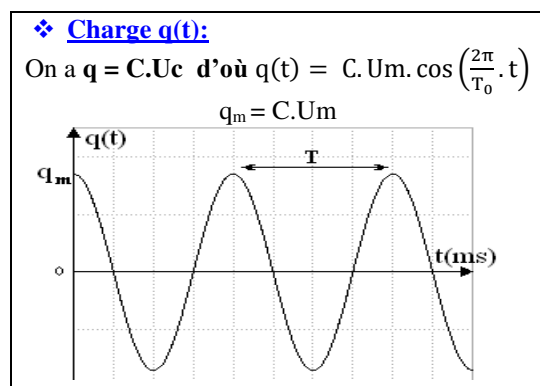
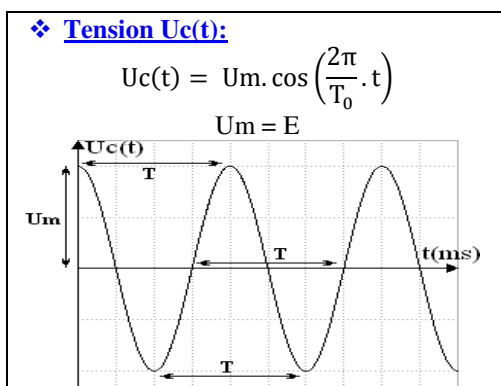
Conclusion : $U_m=E$, $\varphi=0$, et $T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}$ alors : $U_c(t) = E \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t\right)$

3.3. Expression de l'intensité de courant :

$i = C \cdot \frac{dU_c}{dt} = -C \cdot U_m \cdot \left(\frac{2\pi}{T_0}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right) = I_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$: Expression de l'intensité de courant

Avec $I_m = C \cdot U_m \cdot \left(\frac{2\pi}{T_0}\right) = C \cdot U_m \cdot \left(\frac{2\pi}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}\right) = U_m \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}$

3.4. Quelques courbes :



4. Energie totale E_T :

L'énergie totale E_T emmagasinée dans un circuit LC est à tout instant la somme de l'énergie électrique E_e dans le condensateur et de E_m l'énergie magnétique dans la bobine

$E_T = E_e + E_m$ avec $E_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} C \cdot U_c^2$ donc $E_m = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \cdot L \cdot \left(\frac{U_c}{R}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{R^2} \cdot U_c^2$

5. Conservation de l'énergie totale E_T :

on sait que : $E_T = E_e + E_m = \frac{1}{2} C \cdot U_c^2 + \frac{1}{2} L \cdot i^2$ et on dérive $\frac{dE_T}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C \cdot U_c^2 + \frac{1}{2} L \cdot i^2 \right)$; $(f^n)' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$ et $f^2 = 2 \cdot f \cdot f'$

$$\frac{dE_T}{dt} = \frac{1}{2} C \cdot \frac{d}{dt} U_c^2 + \frac{1}{2} L \cdot \frac{d}{dt} i^2$$

$$= \frac{1}{2} C \cdot (2 \cdot U_c \cdot \frac{dU_c}{dt}) + \frac{1}{2} L \cdot (2 \cdot i \cdot \frac{di}{dt})$$

$$= C \cdot U_c \cdot \frac{dU_c}{dt} + L \cdot i \cdot \frac{di}{dt}$$

$$= C \cdot U_c \cdot \frac{dU_c}{dt} + L \cdot i \cdot \frac{di}{dt}$$

; $\frac{dU_c^2}{dt} = 2 \cdot U_c \cdot \frac{dU_c}{dt}$ et $\frac{di^2}{dt} = 2 \cdot i \cdot \frac{di}{dt}$

; $i = C \cdot \frac{dU_c}{dt}$ et $\frac{di}{dt} = C \cdot \frac{d^2U_c}{dt^2}$

$$= C \cdot U_c \cdot \frac{dU_c}{dt} + L \cdot \left(C \cdot \frac{dU_c}{dt} \right) \cdot \left(C \cdot \frac{d^2U_c}{dt^2} \right)$$

$$= C \cdot \frac{dU_c}{dt} \left(U_c + L \cdot C \cdot \frac{d^2U_c}{dt^2} \right) \quad ; U_c + L \cdot C \cdot \frac{d^2U_c}{dt^2} = 0 : \text{Equation différentielle}$$

$$= 0$$

Conclusion :

$E_T = C^te$ est une constante au cours du temps donc l'énergie totale se conserve.

Les oscillations correspondent à un échange énergétique entre le condensateur et la bobine : Il y a conversion d'énergie électrique en énergie magnétique et réciproquement.

**** Exploiter les courbes :**

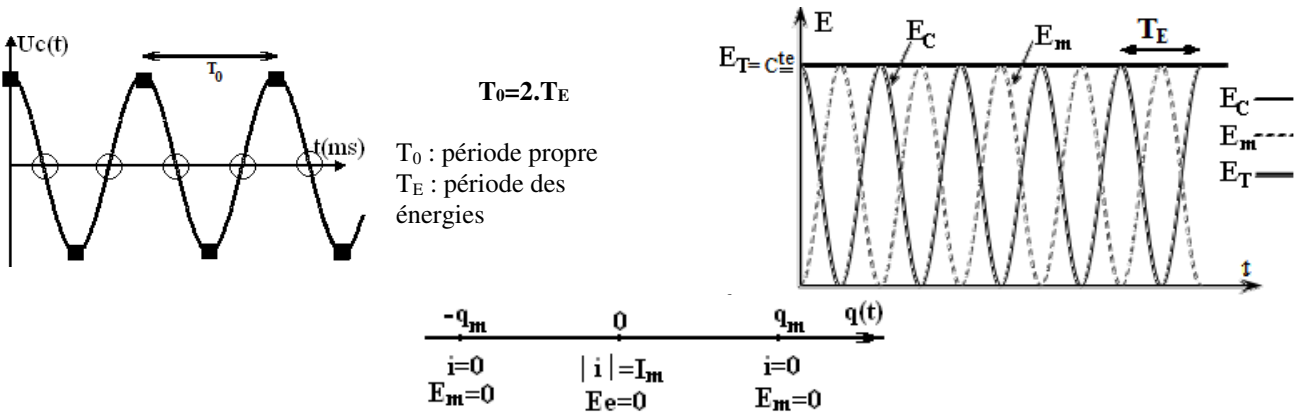
$$i = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{dU_c}{dt}$$

$i(t)$ est la dérivée première de $U_c(t)$ représentant une fonction sinusoïdale ($U_c(t) = U_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t\right)$) donc $i(t)$ est nulle si $U_c(t)$ (ou bien $q(t)$) est extrémum (soit maximum ou minimum) et inversement.

Points spécifiques sur la figure	$U_c(t)$	$q(t)$	$i(t)$	E_e	E_m	$E_T = E_e + E_m$
○	0	0	I_m	0	$E_m = \frac{1}{2} L I_m^2$	$E_T = \frac{1}{2} L I_m^2 = \frac{1}{2} L \frac{U_{Rm}^2}{R^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{R^2} \cdot U_{Rm}^2$
■	U_m	q_m	0	$E_e = \frac{1}{2} \frac{q_m^2}{C}$	0	$E_T = \frac{1}{2} \frac{q_m^2}{C} = \frac{1}{2} C \cdot U_{Cm}^2$

NB :

L'énergie totale dans un circuit LC est constante et est égale à l'énergie électrique initiale (maximale)



NB :

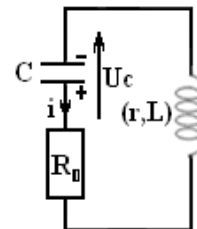
$T_0 = 2 \cdot T_e$: La période propre des oscillations électriques T_0 est le double de la période des énergies T_e

II. Etude du circuit RLC

1. Décharge d'un condensateur dans une bobine

Le montage est constitué de :

- Un condensateur de capacité C , initialement chargé et porteur de la charge q_0 et une tension $U_0 = E$
- Une bobine de coefficient d'induction L et de résistance interne r
- Un conducteur ohmique de résistance R_0 La résistance totale du circuit est $R = R_0 + r$



2. Equation différentielle :

En appliquant la loi d'additivité des tensions $U_R + U_c + U_L = 0$ et les transitions :

$$U_R = R_0 \cdot i = R_0 \cdot \frac{dq}{dt} = R_0 \cdot C \cdot \frac{dU_c}{dt} \quad \text{et} \quad U_L = r \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot \frac{di}{dt}$$

On aboutit à l'équation différentielle vérifié par une variable donnée :

$$q = C \cdot U_c \quad \text{et} \quad i = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{dU_c}{dt}$$

Variable U_c :

$$R \cdot i + U_c + L \cdot \frac{di}{dt} = 0 \quad \text{donc} \quad R \cdot C \cdot \frac{dU_c}{dt} + U_c + L \cdot C \cdot \frac{d^2U_c}{dt^2} = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2U_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dU_c}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} U_c = 0$$

Variable q :

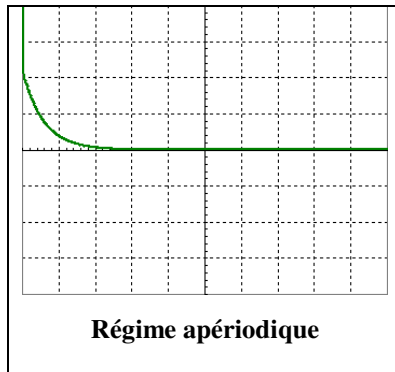
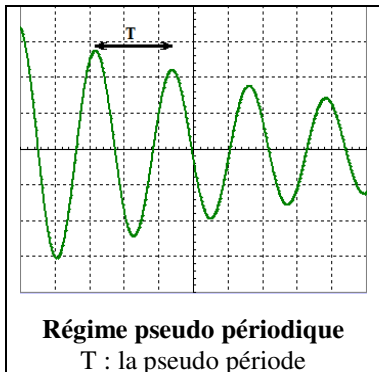
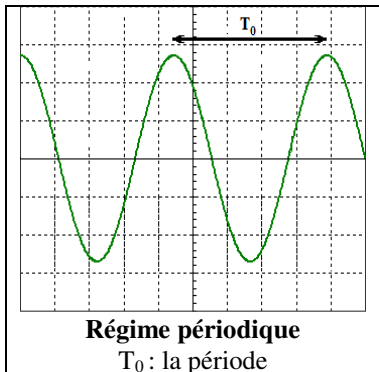
$$R \cdot i + U_c + L \cdot \frac{di}{dt} = 0 \quad \text{donc} \quad R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} + L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} q = 0$$

La grandeur $\frac{R}{L} \cdot \frac{dU_c}{dt}$ ou $\frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt}$

- Concrétise le caractère non-oscillatoire du système (l'amortissement des oscillations électriques)
- Détermine le régime des oscillations (periodique, pseudo périodique ou apériodique)

La résistance est le dipôle qui influe sur l'amplitude des oscillations, quand la résistance **R** du circuit est :

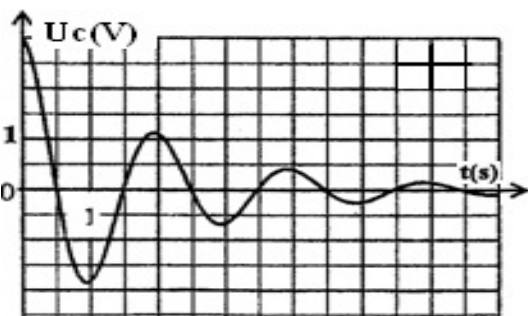
- **Faible** les oscillations du système sont amorties, le régime est **pseudopériodique**.
- **Élevée** le système n'oscille pas et donc le régime est apériodique



NB :

La période et la pseudo période sont considérés souvent égales $T \approx T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}$

3. Courbe de la tension du condensateur (Régime pseudo périodique :



L'amplitude des oscillations diminue au cours du temps

La cause : La résistance est le dipôle qui influe sur l'amplitude des oscillations

L'explication : Dissipation (perte) progressivement de l'énergie (initialement emmagasinée dans le condensateur) en énergie thermique par effet joule dans les résistances.

NB : L'amortissement est d'autant plus important que la résistance est élevée

Un circuit électrique RLC, réalisé avec un condensateur chargé, est le siège d'oscillations électriques libres amorties.

4. Transfert d'énergie entre le condensateur et la bobine :

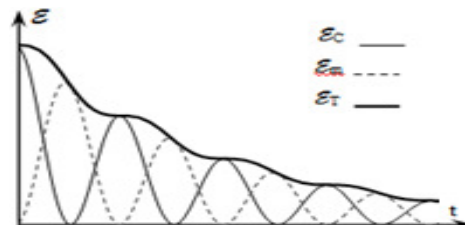
on sait que : $E_T = E_e + E_m = \frac{1}{2} C \cdot U_c^2 + \frac{1}{2} L \cdot i^2$; $(f^n)' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$ et $f^2 = 2 \cdot f \cdot f'$ et on dérive $\frac{dE_T}{dt} = C \cdot \frac{dU_c}{dt} \left(U_c + L \cdot C \cdot \frac{d^2 U_c}{dt^2} \right)$

on a d'après l'équation différentielle : $R \cdot C \cdot \frac{dU_c}{dt} + U_c + L \cdot C \cdot \frac{d^2 U_c}{dt^2} = 0$ avec $U_c + L \cdot C \cdot \frac{d^2 U_c}{dt^2} = -R \cdot C \cdot \frac{dU_c}{dt}$

$\frac{dE_T}{dt} = C \cdot \frac{dU_c}{dt} \left(-R \cdot C \cdot \frac{dU_c}{dt} \right)$ donc $\frac{dE_T}{dt} = R \cdot \left(C \cdot \frac{dU_c}{dt} \right)^2$ puisque $i = C \cdot \frac{dU_c}{dt}$ Alors $\frac{dE_T}{dt} = -R \cdot i^2 < 0$

NB : $\frac{dE_T}{dt} = -R \cdot i^2 < 0$

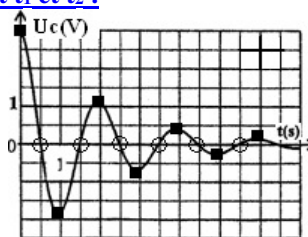
- Les oscillations correspondent à un échange énergétique entre le condensateur et la bobine : Il y a conversion d'énergie électrique en énergie magnétique et réciproquement.
- **Le circuit (RLC) est dissipatif d'énergie :** son énergie totale E_T diminue au cours du temps.



- Le phénomène d'amortissement résulte de la dissipation (perte) de l'énergie totale dans le circuit sous forme d'énergie thermique par effet joule

**** Comment calculer l'énergie dissipée entre deux instant t1 et t2 :**

Points spécifiques sur la figure	U_c	i	E_e	E_m	E_T
■	U_{cmax}	0	$E_e = \frac{1}{2} C \cdot U_{cmax}^2$	0	$E_T = \frac{1}{2} C \cdot U_{cmax}^2$
○	0	I_m	0	$E_m = \frac{1}{2} L \cdot I_{max}^2$	$E_T = \frac{1}{2} L \cdot I_{max}^2$



$\Delta E_T = E_T(t_2) - E_T(t_1)$: L'énergie dissipée par effet joule entre les instants t_1 et t_2

5. Entretien des oscillations

Entretien des oscillations dans un circuit c'est lui fournir de l'énergie pour compenser les pertes par effet Joule dans les résistances, alors on ajoute au circuit un générateur de tensions

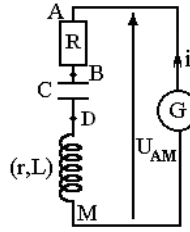
$$U_{AM} = U_{AB} + U_{BD} + U_{DM}$$

$$U_{AM} = R \cdot i + \frac{q}{C} + r \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$U_{AM} = (R + r) \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} + L \cdot \frac{d^2q}{dt^2}$$

On en déduit l'équation différentielle :

$$\ddot{q} + \left(\frac{R+r}{L} \dot{q} - \frac{U_{AM}}{L} \right) + \frac{1}{LC} \cdot q = 0$$



Si $U_{AM} = (R+r) \cdot i$ La tension au borne du générateur est proportionnelle à l'intensité de courant et que le coefficient de proportionnalité est $(R+r)$ alors $\ddot{q} + \frac{1}{LC} \cdot q = 0$

Conclusion :

Le générateur fournit au circuit l'énergie nécessaire pour compenser l'énergie dissipée (perdue) par effet Joule à condition que $U_{AM} = (R+r) \cdot i$